

Problème 1

Résolvez les deux équations suivantes :

$$i) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}, \quad ii) \quad 2x + \sqrt{1-x^2} = 1.$$

Problème 2

1. Sachant que $x = 3$ est une racine de l'équation

$$x^3 - 7x^2 + 10x + 6 = 0 \quad (E)$$

donnez les autres racines de (E) .

2. Utilisez le point 1 pour calculer les racines réelles de l'équation

$$e^{3t} - 7e^{2t} + 10e^t + 6 = 0.$$

Problème 3

Pour un paramètre $a \in \mathfrak{R}$, on considère le système

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (S)$$

1. Pour quelles valeurs de a le système (S) possède-t-il une solution unique ?
2. Donnez la solution de (S) pour les valeurs de a obtenues au point 1.
3. Pour la valeur $a = -1$, donnez deux solutions de (S) .

Problème 4

Dans ce problème, j désigne l'unité imaginaire.

1. Mettez les expressions suivantes sous forme cartésienne :

$$i) \frac{2-j}{3+j} - j, \quad ii) e^{j\frac{\pi}{3}} (e^{j\frac{\pi}{6}} - e^{-j\frac{\pi}{6}}), \quad iii) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \right)^{20}.$$

2. Donnez sous forme cartésienne les racines de l'équation $z^3 - 8j = 0$.

Problème 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = (\ln x)^2$ où $\ln x$ désigne le logarithme naturel de x .

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculez f' et étudiez son signe.
3. Calculez f'' et étudiez son signe.
4. Esquissez avec soin le graphe de f et précisez sur quels intervalles la fonction f est croissante, décroissante, concave ou convexe.

Problème 6

Calculez la solution de l'équation différentielle

$$u'(t) + 3u(t) = \sin(2t)$$

qui satisfait la condition $u(0) = 1$.