heig-vd

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Concours d'entrée en Ingénierie, printemps 2009

Nom: Prénom:

# Test des connaissances en mathématique

**Problème 1**

Résolvez les deux équations suivantes :

$$i) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}, \qquad ii) \quad 2x + \sqrt{1-x^2} = 1.$$

**Problème 2**

1. Sachant que $x = 3$ est une racine de l'équation

$$x^3 - 7x^2 + 10x + 6 = 0 \qquad (E)$$

   donnez les autres racines de $(E)$.
2. Utilisez le point 1 pour calculer les racines réelles de l'équation

$$e^{3t} - 7e^{2t} + 10\,e^t + 6 = 0.$$

**Problème 3**

Pour un paramètre $a \in \Re$, on considère le système

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +6 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad (S)$$

1. Pour quelles valeurs de $a$ le système $(S)$ possède-t-il une solution unique ?
2. Donnez la solution de $(S)$ pour les valeurs de $a$ obtenues au point 1.
3. Pour la valeur $a = -1$, donnez deux solutions de $(S)$.

**Problème 4**

Dans ce problème, $j$ désigne l'unité imaginaire.

1. Mettez les expressions suivantes sous forme cartésienne :

$$i) \quad \frac{2-j}{3+j} - j\,, \qquad ii) \quad e^{j\frac{\pi}{3}}\left(e^{j\frac{\pi}{6}} - e^{-j\frac{\pi}{6}}\right), \qquad iii) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}\right)^{20}.$$

2. Donnez sous forme cartésienne les racines de l'équation $z^3 - 8j = 0$ .

**Problème 5**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = (\ln x)^2$ où $\ln x$ désigne le logarithme naturel de $x$.

1. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
2. Calculez $f'$ et étudiez son signe.
3. Calculez $f''$ et étudiez son signe.
4. Esquissez avec soin le graphe de $f$ et préciser sur quels intervalles la fonction $f$ est croissante, décroissante, concave ou convexe.

**Problème 6**

Calculez la solution de l'équation différentielle

$$u'(t) + 3u(t) = \sin(2t)$$

qui satisfait la condition $u(0) = 1$.