Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Concours d'entrée en Ingénierie, 2012

Nom :

Prénom :

Test des connaissances en mathématiques

Durée : 2 heures

Aucun formulaire ni calculatrice autorisés

Problème 1

Simplifier les expressions suivantes:

$$a)\ \frac{(x-1)(x-4)}{x^2-6x+5} \qquad b)\ \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2y+xy^2} \qquad c)\ \frac{x-4}{x-2}-\frac{x-5}{x-3}+\frac{x-4}{x^2-5x+6}\ .$$

Donner toutes les solutions réelles des équations suivantes:

$$d)\ x^2+4x-1=0 \qquad e)\ e^{2x}+4e^x-1=0\ .$$

Problème 2

Dans ce problème j désigne l'unité imaginaire.

a) Résoudre l'équation $\dfrac{1}{2+3j} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1-j}$.

b) Donner le module et l'argument du nombre complexe $z_1 = \dfrac{j}{1+aj}$ où $a \in \mathbb{R}$.

c) Écrire le nombre $z_2 = \left(e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^2$ sous forme cartésienne.

Problème 3

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et soient $x_0 \neq 0$ et $P_0 = (x_0, x_0^2)$.

a) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point P_0.

b) Donner l'équation de la normale (perpendiculaire) à $\mathcal{P}$ au point P_0.

On s'intéresse maintenant aux normales à $\mathcal{P}$ qui passent par le point $Q = (-2, \frac{5}{2})$.

c) Vérifier que la normale à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse $x_0 = 1$ passe par le point Q.

d) Donner les autres valeurs de x_0 pour lesquelles la normale à $\mathcal{P}$ au point P_0 passe par Q.

Problème 4

a) Donner l'équation cartésienne de la droite d qui passe par les points $A = (-1, -5)$ et $B = (2, 1)$.

b) Donner le rayon des cercles dont le centre est sur l'axe Oy et qui sont simultanément tangents à l'axe Ox et à la droite d définie au point a).

Problème 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 \ln x$ où $\ln x$ désigne le logarithme naturel de x.

a) Donner l'ensemble de définition de f.

b) Calculer f' et étudier son signe.

c) Calculer f'' et étudier son signe.

d) Esquisser le graphe de f et préciser sur quels intervalles la fonction f est croissante, décroissante, concave ou convexe.

Problème 6

Calculer la solution générale de l'équation différentielle

$$u''(t) - 5u'(t) - 14u(t) = t - 1\,.$$