heig-vd

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Concours d'entrée en Ingénierie, 2013

Nom : Prénom :

Test des connaissances en mathématiques

Durée : 2 heures

Aucun formulaire ni calculatrice autorisés

Problème 1

a) Développer l'expression $(x-2)(x^2+(1-\sqrt{5})x+4)(x^2+(1+\sqrt{5})x+4)$.

b) Simplifier les expressions suivantes :

1) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$ 2) $\dfrac{(e^x-e^{-x})^2+2}{e^{-2x}}$ 3) $\dfrac{1}{(x-1)^3}-\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x-1}$.

Problème 2

On appelle élasticité d'une fonction dérivable u à valeurs positives, la fonction notée E_u définie par la relation $E_u(x) = x\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

a) Calculer l'élasticité de la fonction $u(x) = e^{3x+\pi}$.

b) Exprimer l'élasticité de $\sqrt{f}$ à l'aide de l'élasticité de la fonction f.

c) Exprimer l'élasticité de fg à l'aide de l'élasticité de la fonction f et de celle de g.

d) Exprimer l'élasticité de $\dfrac{f}{g}$ à l'aide de l'élasticité de la fonction f et de celle de g.

Problème 3

Soient les points $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(0,-1)$ et $C(4,0)$. Parmi les points du segment OC, quelle est l'abscisse du point P qui est tel que la somme des distances de P à A, à B et à C est minimale ?

Problème 4

Dans ce problème, j désigne l'unité imaginaire.

a) Écrire les nombres suivants sous forme cartésienne :

1) $\dfrac{2-j}{1+2j}$ 2) $e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ 3) $j^3 e^{j\frac{3\pi}{4}}$.

b) Sachant que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a l'identité

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

écrire l'expression

$$1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{11}$$

sous la forme la plus simple possible.

c) Donner les racines de l'équation $z^4 + \dfrac{1}{2} + j\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ sous forme cartésienne.

Problème 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x$ où $\ln x$ désigne le logarithme naturel de x.

a) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point $P = (1, f(1))$.

b) Pour quelle valeur de x_0 la tangente au graphe de f au point $Q = (x_0, f(x_0))$ est-elle perpendiculaire à la tangente calculée au point a) ?

Problème 6

Calculer la solution générale de l'équation différentielle

$$u'(t) + 8u(t) = \cos(3t)\,.$$