heig-vd

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Concours d'entrée en Ingénierie, 2014

Nom :

Prénom :

Test des connaissances en mathématiques

Durée : 2 heures

Aucun formulaire ni calculatrice autorisés

Problème 1

a) Simplifier l'expression $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}-\dfrac{x-2}{x^2-2x+2}\right)$.

b) Donner toutes les solutions réelles de l'équation $e^{x^2-2x-8}-1=0$.

c) Écrire l'expression $\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{y}\,z^4}\right)$, dans laquelle ln désigne le logarithme naturel et x, y et z sont positifs, en utilisant les logarithmes de x, y et z.

Problème 2

a) Donner, en radians, toutes les solutions de l'équation $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$.

b) L'intensité I (en ampères) du courant dans un circuit à courant alternatif au temps t (en secondes) est donnée par $I = 30\sin(\omega t - \frac{7\pi}{3})$ où $\omega = 50\pi$ rad/s.
Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle $I = 15$.

Problème 3

Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{a}{1+be^{-ct}}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ sont des paramètres.

a) Calculer $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$ et $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

b) Calculer f' et vérifier que f' a un signe constant sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer f'' et résoudre l'équation $f''(t) = 0$.

d) Calculer $f(t_I)$ où t_I est la solution de l'équation $f''(t) = 0$ résolue au point c).

e) Esquisser le graphe de la fonction f pour les paramètres $a = 12$, $b = 3$ et $c = 1$ en utilisant les résultats obtenus aux points a), b), c) et d).

Problème 4

Dans ce problème j désigne l'unité imaginaire, souvent notée i.

a) Donner le module et l'argument du nombre $-8-8\sqrt{3}j$ et écrire ce nombre sous forme exponentielle.

b) Donner, sous forme cartésienne, toutes les solutions de l'équation $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}j$.

Problème 5

a) Calculer les coordonnées du point milieu du segment d'extrémités $A = (1, 1)$ et $C = (3, 4)$.

b) Donner un vecteur perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer les coordonnées des points B et D de sorte que le polygone de sommets A, B, C et D soit un carré.

Problème 6

Calculer la solution du problème à conditions initiales

$$\begin{cases} u''(t) - 7u'(t) + 12u(t) = 36 \qquad \text{pour} \quad t \geq 0, \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases}$$